第 5 講　独立な試行の確率，反復試行の確率

PART1　独立な試行の確率

要点 ①　独立な試行

ある2つの試行S，Tについて，互いに他方の結果に影響を及ぼさないとき，2つの試行は「　　　」であるという。

例　1個のさいころを2回続けて投げるとき，1回目に投げる試行をS，2回目に投げる試行をTとすると，SとTは独立　　　　　。

当たりくじ3本を含む10本のくじをA，Bの2人がこの順に1本ずつ引く。
A，Bがくじを引く試行をそれぞれS，Tとし，引いたくじはもとに戻さないとする。Aが当たりくじを引くかはずれくじを引くかで，Bの当たりやすさが異なる。よって，SとTは独立　　　　　。

要点 ②　独立な試行の確率

1個のさいころを2回続けて投げるとき，1回目の試行と2回目の試行は独立である。

この2回の試行を行うとき，起こりうるすべての場合の数は　　　通りである。

また「1回目に偶数，2回目に4以下の目が出る」という事象が起こる場合の数は，
積の法則により　　　通りである。

よって，これが起こる確率を p とすると $p=$　　　$=$　　　と表される。

1個のさいころを投げるとき，「偶数の目が出る」確率は　，「4以下の目が出る」確率は　であるから，p はその「　　」であることがわかる。
一般に，次のことが成り立つ。

> **独立な試行の確率**
>
> 2つの試行S，Tが独立であるとき，Sでは事象 A，Tでは事象 B が起こる確率 p は
>
> $$p=P(A)\times P(B)$$

3つ以上の独立な試行についても，同様の等式が成り立つ。

例　赤玉3個，白玉2個が入っている袋から玉を1個取り出し，色を調べてからもとに戻す試行を3回続けて行うとき，1回目に白玉，2回目に赤玉，3回目に白玉を取り出す確率は

$$=\frac{12}{125}$$

要点③　排反事象→独立な試行→加法定理

袋Aには赤玉3個，白玉2個，袋Bには赤玉4個，白玉3個が入っている。それぞれの袋から玉を1個ずつ取り出すとき，取り出した2個の玉が異なる色である確率を求める。

袋Aから玉を1個取り出す試行と，袋Bから玉を1個取り出す試行は　　　である。
取り出した2個の玉の色が異なるという事象は，次の[1]，[2]のいずれか。
[1] 袋Aから赤玉，袋Bから白玉を取り出す
[2] 袋Aから白玉，袋Bから赤玉を取り出す
[1]の確率は $\frac{3}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{9}{35}$　　[2]の確率は
[1]，[2]は互いに　　　であるから，求める確率は加法定理により

$$\frac{9}{35}+\qquad=$$

ある事象が起こる確率を求めるとき，その事象を上の[1]，[2]のように「排反な事象」に分けることで，より具体的な事象として確率を求めることができる。
上の[1]，[2]それぞれにおいては，独立な試行の確率を　　　　　ことによって求めている。
その後，排反な事象[1][2]の結果を，加法定理により　　　　　ことで，ある事象が起こる確率を求めることができる。

1 (1) 1個のさいころを2回続けて投げるとき，次の確率を求めよ。

(i) 1回目に奇数の目，2回目に6の約数の目が出る確率

(ii) 少なくとも1回は6の約数の目が出る確率

(2) 袋Aには赤玉2個，白玉4個，袋Bには赤玉1個，白玉3個が入っている。
それぞれの袋から玉を2個ずつ，合計4個取り出すとき，取り出した4個の中に赤玉が1個だけ含まれる確率を求めよ。

Point Pickup

独立な試行の確率

2つの試行S，Tが「　　　」であるとき，Sでは事象A，Tでは事象Bが起こる確率pは

$$p=P(A)\times P(B)$$

つまり，それぞれの試行の確率を「　　　　」ことで求めることができる。

3つ以上の独立な試行についても，同様の等式が成り立つ。

排反事象に分ける

① 確率を求めたい事象を，「　　　事象」に分ける。

② ①のそれぞれの事象について，確率を求める。

③ ②で出した確率を「　　　　」。

第 5 講　PART1 確認問題

1 1個のさいころを2回続けて投げるとき，1回目に偶数の目が出て，2回目に5以上の目が出る確率は $\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

2 1個のさいころを2回続けて投げるとき，少なくとも1回は6の目が出る確率は $\frac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オカ}}$ である。

3 袋Aには赤玉1個，白玉3個，袋Bには赤玉2個，白玉1個が入っている。
袋Aから2個,袋Bから1個,合計3個の玉を取り出すとき，取り出した玉の中に赤玉が1個だけ含まれる確率は $\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である。

第 5 講　独立な試行の確率，反復試行の確率

PART1　独立な試行の確率

1　(1)　1 個のさいころを 2 回続けて投げるとき，次の確率を求めよ。

(i)　1 回目に奇数の目，2 回目に 6 の約数の目が出る確率

(ii)　少なくとも 1 回は 6 の約数の目が出る確率

(2)　袋 A には赤玉 2 個，白玉 4 個，袋 B には赤玉 1 個，白玉 3 個が入っている。それぞれの袋から玉を 2 個ずつ，合計 4 個取り出すとき，取り出した 4 個の中に赤玉が 1 個だけ含まれる確率を求めよ。

[解答]

(1)　さいころを投げる各回の試行は独立である。

(i)　6 の約数の目は 1，2，3，6 である。1 回目に奇数の目，2 回目に 6 の約数の目が出る確率は

$$\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$$

(ii)「少なくとも 1 回は 6 の約数の目が出る」事象は，「2 回とも 6 の約数以外の目が出る」事象の余事象である。

2 回とも 6 の約数以外の目が出る確率は $\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$

よって，少なくとも 1 回は 6 の約数の目が出る確率は $1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

(2)　袋 A から玉を 2 個取り出す試行と，袋 B から玉を 2 個取り出す試行は独立である。

取り出した 4 個の中に赤玉が 1 個だけ含まれる事象は，次の [1]，[2] のいずれか。

[1]　袋 A から赤玉 1 個と白玉 1 個，袋 B から白玉 2 個を取り出す

[2]　袋 A から白玉 2 個，袋 B から赤玉 1 個と白玉 1 個を取り出す

[1] の確率は $\frac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{24}{90}$

[2] の確率は $\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}\times\frac{1\times{}_3C_1}{{}_4C_2}=\frac{18}{90}$

[1]，[2] は互いに排反であるから，求める確率は $\frac{24}{90}+\frac{18}{90}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$

第5講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：6

[解説]

1回目に偶数の目が出る確率は，

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

2回目に5以上の目が出る確率は，

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

さいころを投げる試行は独立だから，求める確率は，

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$ [A]

[A]　独立な試行の確率
2つの試行S，Tが独立であるとき，Sでは事象 A，Tでは事象 B が起こる確率 p は，
$p=P(A)\times P(B)$

2

[正解] ウエ：11，オカ：36

[解説]

「少なくとも1回は6の目が出る」

という事象を A とすると，この余事象 $\overline{A}$ は，

「2回とも6以外の目が出る」となる。 [B]

つまり $P(\overline{A})$ は，2回とも1～5までの目が出る確率だから，

$$P(\overline{A})=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$$

よって，求める確率は，

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$ [C]

$$=1-\frac{25}{36}=\mathbf{\frac{11}{36}}$$

[B]　「少なくとも1回は～出る」の余事象は，「1回も～出ない」
(「2回とも6の目が出ない」)

[C]　余事象の確率

3 **[正解]** キ：1，ク：2

[解説]

取り出した3個の玉の中に赤玉が1個だけ含まれるのは，次の〔1〕，〔2〕のいずれかである。 [D]

〔1〕袋Aから赤玉1個，白玉1個を取り出し，袋Bから白玉を取り出す。

〔2〕袋Aから白玉2個を取り出し，袋Bから赤玉を取り出す。

〔1〕において，

袋Aから赤玉1個，白玉1個を取り出す確率は，

$$\frac{1\times{}_3C_1}{{}_4C_2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

よって，〔1〕の確率は，$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ [E]

〔2〕において，

袋Aから白玉2個を取り出す確率は，

$$\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

よって，〔2〕の確率は，$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{6}$

〔1〕，〔2〕は互いに排反であるから，求める確率は，

[F]

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

[D]　排反な2つの事象に分ける。

[E]　2つの試行は独立なので，それぞれの確率をかけて求める。(独立な試行の確率)

[F]　〔1〕と〔2〕の事象は互いに排反なので，それぞれの確率を加える。(確率の加法定理)